Problemas de Olimpiadas Matemáticas: combinatoria, juegos, etc.

Noviembre de 2016

Problema 1 (2002) *La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.*

Solución: Consderemos los tres alumnos de mayor edad. Si la suma de sus edades fuera menor de 51, el menor de ellos tendría como mucho 16 años. Esto implica que los otros 117 estudiantes tendrían como mucho 16 años, luego la suma total de estos 117 sería como mucho $117 \cdot 16 = 1872$. Sumando la edad de los tres mayores, la suma total sería como mucho $1872 + 50 = 1922$, lo que no es posible. $\square$

Problema 2 *Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dgitos de cada tarjeta extrada. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?*

Solución: Las sumas posibles son todos los números del 1 al 27. Observemos que el 1 y el 27 sólo pueden salir una vez, con las tarjetas 100 y 999, respectivamente. Los demás números pueden salir al menos tres veces cada uno. El máximo número de tarjetas que se pueden sacar sin que tres sumas sean iguales se obtendría al sacar la tarjeta 100, la 999, y dos tarjetas por cada número entre 2 y 26. En total serían $2 + 2 \cdot 25 = 52$ tarjetas. Por tanto, sacando 53 tarjetas garantizamos que al menos tres de las sumas sean iguales. $\square$

Problema 3 (2009) *Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.*

Solución: Todo punto estará unido a k puntos de otro color, y a $n+1-k$ puntos del tercer color. Sea x un punto tal que este número k sea mínimo, y sea y uno de los k puntos del segundo color que están unidos a x. Sabemos que x estará unido a $n+1-k$ puntos del tercer color y que, por la minimalidad de k, y está unido al menos a k puntos del tercer color. Como sólo hay n puntos del tercer color, debe haber al menos un punto que esté unido a x y a y, formando el triángulo pedido. $\square$

Problema 4 (2004) *En un tablero de damas (8×8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?*

Solución: No se puede. Una ficha que comience en una fila par, estará siempre en una fila par, y una que comience en una fila impar, estará siempre en una fila impar. Al comienzo hay 16 fichas en filas impares y 8 fichas en filas pares, luego no pueden terminar en las tres filas de abajo, pues en ese caso habría 16 fichas en filas pares y 8 en filas impares. $\square$

Problema 5 (2003) *Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.*

Solución: Numeramos las bolas de la 1 a la $4n$. El segmento de tamaño $2n$ que comienza en la bola 1 tendrá k bolas negras. El segmento que comienza en la bola 2 se obtiene del anterior al eliminar la bola 1 y añadir la bola $2n+1$, por tanto tendrá k, $k-1$ o $k+1$ bolas negras. De este modo, vemos que si el segmento que comienza en la bola i tiene un número de bolas negras, el que comienza en la bola $i+1$ tendrá el mismo número, o una bola negra menos, o una bola negra más.

El último segmento contiene todas las bolas que no estaban en el primer segmento, luego tiene $2n-k$ bolas negras. Por tanto, si pasamos de tener k bolas negras a tener $2n-k$, y a cada paso el número de bolas negras sólo puede variar de la forma indicada, debe haber algún segmento cuyo número de bolas negras (y por tanto blancas) sea exactamente n. $\square$

Problema 6 *En una isla del Pacífico se observa que nada más que sobreviven unos camaleones, que pueden cambiar de color. En total había 20 verdes, 19 grises y 18 marrones. Se observó que cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos, los dos cambian automáticamente al tercer color y que no cambian de color en ningún otro caso. ¿Es posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?*

Solución: En cada cambio, un color aumenta en dos camaleones, y los otros dos colores disminuyen en un camaleón cada uno. Por tanto, la diferencia entre el número de camaleones de dos colores, o bien no cambia, o aumenta en 3, o disminuye en 3. Es decir, la diferencia entre dos colores siempre es la misma módulo 3. Al inicio, las diferencias son 1, 1 y 2, respectivamente. Si terminaran siendo todos los camaleones del mismo color, las diferencias serían ± 57, ± 57 y 0, es decir, 0, 0 y 0 (módulo 3). Por tanto, es imposible que terminen siendo todos del mismo color. $\square$

Problema 7 (2004) *Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara* **negra** *hacia* *arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?*

Solución: Observemos que el número 2004 es múltiplo de 3. Podemos considerar el conjunto A de las bolas que están en las posiciones 1, 4, 7, ..., 2002, el conjunto B de las bolas que están en las posiciones 2, 5, 8, ..., 2003, y el conjunto C de las bolas que están en las posiciones 3, 6, 9, ..., 2004. Con cada movimiento, cambia el color de una ficha de cada conjunto, por tanto, cambia la paridad del número de fichas negras de cada conjunto. Si al principio el número de fichas negras en cada conjunto es 1, 0 y 0, respectivamente, es imposible que se consiga terminar con 0, 0 y 0, porque siempre habrá dos conjuntos que tendrán distinta paridad.

En el caso en que haya 2003 fichas, y la número 1 (por ejemplo) sea la única negra, podemos aplicar los movimientos correspondientes, en este orden, a las fichas 2, 3, 4, ..., 2001, 2002, 2, 5, 8, ..., 1997, 2000, y todas las fichas terminarán siendo blancas. □

Problema 8 *Dos jugadores van colocando monedas alternativamente en un tablero de ajedrez de 2008×2008 casillas. Gana el primer jugador que consiga poner una moneda que forme, con otras tres monedas del tablero, los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. ¿Cul de los jugadores tiene una estrategia ganadora, el primero o el segundo?*

Solución: El segundo. Cuando el primer jugador ponga una ficha, el segundo puede poner una ficha en la misma fila. Las columnas de estas dos filas quedan inhabilitadas, porque si algún jugador colocase una ficha en alguna de las dos columnas, el otro jugador ganaría formando un rectángulo. Así, con cada movimiento del jugador 1, el jugador 2 pondrá una ficha en la misma fila, e inhabilitará otras dos columnas. Después de 2008 jugadas (si ninguno ha cometido un error), las 2008 columnas estarán inhabilitadas: ponga donde ponga el jugador 1, el jugador 2 ganará la partida. □

Problema 9 (2005) *En un tablero de ajedrez* 10×10 *se colocan 41 torres. Probar que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.*

Solución: Debe existir una fila A que contiene al menos 5 torres, ya que si todas las filas tuvieran como mucho 4 torres, habría como mucho 40 torres, lo que no es cierto.

Si quitamos la fila A, quedan 9 filas con al menos 31 torres. Por el mismo razonamiento anterior, una fila B de estas 9, contiene al menos 4 torres.
Si quitamos las filas A y B, quedan 8 filas con al menos 21 torres, por lo que una fila C contiene al menos 3 torres.
Quitando las filas A, B y C, quedan 7 filas con al menos 11 torres, por lo que una fila D contiene al menos 2 torres.
Quitando la fila A, B, C y D quedan 6 filas una de las cuales, digamos E, contiene al menos 1 torre.

Elegimos una torre T_1 de la fila E.
Elegimos una torre T_2 de la fila D, que no esté en la columna de T_1.

Elegimos una torre T_3 de la fila C, que no esté en la columna de T_1 ni en la de T_2.
Elegimos una torre T_4 de la fila B, que no esté en las columnas de T_1, T_2 y T_3.
Finalmente elegimos una torre T_5 de la fila A que no esté en las columnas de

Por construcción, las torres T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 no se comen entre sí. $\square$

Problema 10 (2006) *Decimos que tres números naturales distintos forman una terna aditiva si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.*

Solución: Observemos que si $a + b = c$ con $a < b$, y además $a' + b' = c$ con $a' < b'$, entonces o bien $a = a'$ y $b = b'$, o bien los cuatro números a, b, a', b' son distintos.

En un conjunto de 20 números naturales, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$, veamos para un cierto i cuántas ternas puede haber que tengan a a_i como número mayor. Si $i = 2k + 1$, el número a_{2k+1} tiene $2k$ números menores que él, luego sólo puede ser el número mayor en k ternas, por la propiedad anterior. Si $i = 2k+2$, el número a_{2k+2} tiene $2k+1$ números menores que él, luego sólo puede ser el número mayor en k ternas. Por tanto, en el conjunto de 20 números, como mucho puede haber $0+0+1+1+2+2+3+3+\cdots+9+9 = 90$ ternas.

Por otra parte, existe un conjunto de 20 números que tiene exactamente 90 ternas. Concretamente: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Luego la respuesta es 90. $\square$

Problema 11 (2004) *¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?*

Solución: No se puede. Supongamos que es posible, y numeremos los segmentos del 1 al 2003. Escribamos los pares (a, b) tales que el segmento a corta al segmento b. Por un lado, como cada segmento corta a otros tres, habremos escrito $2003 \cdot 3$ pares, que es un número impar. Por otro lado, por cada par (a, b) tendremos el par (b, a), luego podemos agrupar los pares de dos en dos, es decir, habrá un número par, lo que es imposible. $\square$

Problema 12 (2002) *Considera 7 puntos distintos en el plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.*

Solución: Escojamos dos de los 7 puntos, A y B, de forma que la recta AB deje todos los puntos en un mismo semiplano. Supongamos que sólo hubiera 2 longitudes distintas, a y b. Entonces todos los puntos que no sean A y B, deben estar en una circunferencia de centro A y radio a o b, y en una circunferencia de centro B y radio a o b. Como estas circunferencias tienen como mucho 4 puntos de corte en el mismo semiplano delimitado por la recta AB, se sigue que como mucho podríamos tener 6 puntos, lo cual es una contradicción. $\square$